Le théorème du viriel

On se propose de démontrer le théorème du viriel de deux manières différentes. La première fait appel à deux "tricks" qu'il faut voir. Cette preuve met en avant une quantité, notée S ici, qui permet la conclusion. Partant de S, il est possible d'exhiber une autre démonstration un peu moins calculatoire et plus élégante (à mon goût) ; c'est ce qui est fait dans la deuxième preuve.

Remarque : Certains passages des deux preuves sont identiques. Il nous est dès lors possible de ne pas devoir exhiber deux fois la démonstration des mêmes égalités. Toutefois, j'ai décidé de faire figurer l'entier des deux preuves afin qu'elle puisse être lue indépendamment l'une de l'autre.

Théorème 1. *Soit un système isolé de masses ponctuelles. Alors l'énergie cinétique moyenne est égale l'opposé de la moitié de l'énergie potentielle moyenne :*

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle.$$

Démonstration. On écrit $\mathbf{r_i}$ le rayon vecteur de la particule i et m_i sa masse. Les interactions étant des interactions gravitationnelles, Newton permet d'écrire

$$\mathbf{F_i} = -\sum_{\substack{j \\ j \neq i}} G m_i m_j \frac{\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|^3} = m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1}$$

Il nous est permis de multiplier cette égalité par $\mathbf{r_i}$ et de sommer sur les particules. Ce qui donne

$$\sum_i \mathbf{F_i} \mathbf{r_i} = -\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} G m_i m_j \frac{\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j})}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|^3} = \sum_i m_i \mathbf{r_i} \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2}$$

En remarquant que les indices de la double somme sont muets, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
-2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_im_j\frac{\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3} &= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_im_j\left(\frac{\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3}+\frac{\mathbf{r_j}(\mathbf{r_j}-\mathbf{r_i})}{|\mathbf{r_j}-\mathbf{r_i}|^3}\right)\\
&= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_im_j\frac{\mathbf{r_i}^2-2\mathbf{r_i}\mathbf{r_j}+\mathbf{r_j}^2}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3}\\
&= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_im_j\frac{(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})^2}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3}\\
&= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

L'égalité (2) peut maintenant s'écrire

$$
-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|}=\sum_i m_i\mathbf{r_i}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (4)
$$

Mais on peut obtenir une relation permettant de simplifier cette dernière équation :

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r_i}^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\mathbf{r_i}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t}\right)=2\mathbf{r_i}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t^2}+2\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t}\right)^2, \qquad (5)
$$

et donc

$$
\mathbf{r_i}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r_i}^2-\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t}\right)^2. \qquad (6)
$$

L'équation (4) devient alors

$$
-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|}=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r_i}^2-2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r_i}\right)^2\right). \qquad (7)
$$

En écrivant cette égalité de manière légèrement différente, on voit apparaître des quantitiés connues. En effet,

$$
\underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|}}_{E_{pot}}+\underbrace{\sum_i m_i\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_i}}{\mathrm{d}t}\right)^2}_{2E_{cin}}=\frac{1}{2}\sum_i m_i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r_i}^2=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\underbrace{\left(\sum_i m_i\mathbf{r_i}^2\right)}_{I} \qquad (8)
$$

où l'on a écrit I le moment d'inertie. Posons S la dérivée du moment d'inertie, ce qui s'écrit

$$
S=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\sum_i \mathbf{p_i}\mathbf{r_i} \qquad (9)
$$

où les $\mathbf{p_i}$ sont les quantités de mouvement. L'équation (8) devient alors

$$E_{pot} + 2E_{cin} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

L'idée est maintenant de procéder à une moyenne temporelle sur un temps τ quelconque. Evaluons tout d'abord l'effet d'une telle moyenne sur la dérivée de S. Par définition de la moyenne, on a

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \right\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{S(\tau)-S(0)}{\tau} \tag{11}$$

Le système étant parfaitement isolé, aucune masse ne peut s'en échapper. De plus, seules les interactions gravitationnelles sont prises en compte ici (pas de chocs). Ainsi, la dérivée du moment d'inertie doit rester bornée. On trouve donc

$$\lim_{\tau\to\infty}\left|\left\langle \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \right\rangle_\tau\right| = \lim_{\tau\to\infty}\left|\frac{S(\tau)-S(0)}{\tau}\right| \leq \lim_{\tau\to\infty}\left|\frac{S_{max}-S_{min}}{\tau}\right| = 0 \tag{12}$$

Finalement, on voit que pour des temps assez long, on peut écrire que

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \right\rangle_\tau \simeq 0. \tag{13}$$

En prenant maintenant la moyenne de l'équation (10) pour des temps τ assez long, on trouve que

$$\langle E_{pot}\rangle_\tau + 2\langle E_{cin}\rangle_\tau = \left\langle \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \right\rangle_\tau = 0, \tag{14}$$

ce qui prouve le théorème du viriel. □

Démonstration. Posons la fonction S comme étant la moitié de la dérivée du moment d'inertie,

$$S = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{p_i}\mathbf{r_i}. \tag{15}$$

Montrons que la moyenne de la dérivée S est nulle pour des temps τ assez long. Par définition de la moyenne, on a

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \right\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{S(\tau)-S(0)}{\tau} \tag{16}$$

Le système étant parfaitement isolé, aucune masse ne peut s'en échapper. De plus, seules les interactions gravitationnelles sont prises en compte ici (pas de chocs). Ainsi, la dérivée du moment d'inertie doit rester bornée. On trouve donc

$$\lim_{\tau\to\infty}\left|\left\langle\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right\rangle_\tau\right| = \lim_{\tau\to\infty}\left|\frac{S(\tau)-S(0)}{\tau}\right| \leq \lim_{\tau\to\infty}\left|\frac{S_{max}-S_{min}}{\tau}\right| = 0 \qquad (17)$$

Finalement, on voit que pour des temps assez long, on peut écrire que

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right\rangle_\tau \simeq 0. \qquad (18)$$

La dérivée de S peut maintenant être explicitée. On trouve

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{p_i}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r_i} + \sum_i \mathbf{p_i}\mathbf{v_i} = \sum_i \mathbf{F_i}\mathbf{r_i} + 2E_{cin}. \qquad (19)$$

En prenant la moyenne temporelle de cette équation (on ne précisera plus pour des temps τ assez long), il vient

$$\langle E_{cin}\rangle = -\frac{1}{2}\langle\sum_i \mathbf{F_i}\mathbf{r_i}\rangle. \qquad (20)$$

Seules les interactions gravitationnelles étant prise en compte ici, on peut expliciter la somme :

$$\sum_i \mathbf{F_i}\mathbf{r_i} = -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_i m_j \frac{\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3}. \qquad (21)$$

En remarquant que les indices de la double somme sont muets, on peut écrire

$$\begin{aligned}
-2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_i m_j \frac{\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3} &= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_i m_j \left(\frac{\mathbf{r_i}(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3} + \frac{\mathbf{r_j}(\mathbf{r_j}-\mathbf{r_i})}{|\mathbf{r_j}-\mathbf{r_i}|^3}\right) \\
&= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_i m_j \frac{\mathbf{r_i}^2 - 2\mathbf{r_i}\mathbf{r_j} + \mathbf{r_j}^2}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3} \\
&= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} Gm_i m_j \frac{(\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j})^2}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|^3} \\
&= -\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité permet d'écrire que

$$\sum_i \mathbf{F_i}\mathbf{r_i} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r_i}-\mathbf{r_j}|} = E_{\text{pot}} \qquad (23)$$

L'équation (20) permet alors de conclure que

$$\langle E_{cin} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_{pot} \rangle. \tag{24}$$

Ce qui prouve le théorème du viriel. □